

DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

Jesús María Goñi (coord.)

Fernando Corbalán, Joaquín Giménez, Jesús María Goñi,
Irene López-Goñi, Salvador Llinares, M.^a Carmen Penalva,
Nuria Planas, Julia Valls, Yuly M. Vanegas



MINISTERIO
DE EDUCACIÓN

 **GAO**

12 Vol. II

DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

Jesús María Goñi (coord.)

Fernando Corbalán, Joaquín Giménez, Jesús María Goñi,
Irene López-Goñi, Salvador Llinares, M.^a Carmen Penalva,
Nuria Planas, Julia Valls, Yuly M. Vanegas



GOBIERNO
DE ESPAÑA

MINISTERIO
DE EDUCACIÓN

IFIIE
INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN
FACULTAD DE EDUCACIÓN

 **GRAÓ**

12 Vol. II

José Miguel Meza Ortiz

2

Formación del Profesorado. Educación Secundaria

Serie: Didáctica de las Matemáticas/Formación y Desarrollo Profesional del Profesorado

Director de la colección: César Coll

Coeditan



MINISTERIO DE EDUCACIÓN

Secretaría de Estado de Educación y Formación Profesional

Instituto de Formación del Profesorado, Investigación e Innovación Educativa

© Secretaría General Técnica

Catálogo de publicaciones del Ministerio: educacion.es

Catálogo general de publicaciones oficiales: 060.es

Editorial GRAÓ, de IRIF, S.L.

C/ Hurtado, 29. 08022 Barcelona

www.grao.com

© Jesús María Goñi (coord.), Fernando Corbalán, Joaquín Giménez, Jesús María Goñi, Irene López-Goñi, Salvador Llinares, M.ª Carmen Penalva, Nuria Planas, Julia Valls, Yuly M. Vanegas

© De esta edición:

Editorial GRAÓ, de IRIF, S.L.

Ministerio de Educación, Secretaría General Técnica

1.ª edición: marzo 2011

NIPO: 820-11-018-9

ISBN: 978-84-9980-044-8

D.L.: B-13.069-2011

Diseño: Maria Tortajada

Maquetación: Albert López

Impresión: BIGSA

Impreso en España

Quedan rigurosamente prohibidas, bajo las sanciones establecidas en las leyes, la reproducción o almacenamiento total o parcial de la presente publicación, incluyendo el diseño de la portada, así como la transmisión de ésta por cualquier medio, tanto si es eléctrico como químico, mecánico, óptico, de grabación o bien de fotocopia, sin la autorización escrita de los titulares del *copyright*. Si necesita fotocopiar o escanear fragmentos de esta obra, diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos, www.cedro.org).

2. TAREAS MATEMÁTICAS EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA

CONTENIDO DE CAPÍTULO

- Noción de *tarea*
- La demanda cognitiva de una *tarea*
- Evolución de la demanda cognitiva de las *tareas* durante la enseñanza
- Variables de *tarea* y demanda cognitiva

M.^a Carmen Penalva
Universidad de Alicante

Salvador Llinares
Universidad de Alicante

Este capítulo se centra en el papel que las tareas matemáticas desempeñan en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en educación secundaria. También se ponen de manifiesto las diferentes características que se pueden considerar en relación con la actividad matemática que es posible desarrollar durante su resolución. Para ello caracterizamos la noción de *tarea* y la actividad matemática que pueden llegar a generar los estudiantes. Además, la cuestión de la elección, selección y diseño de las tareas matemáticas se plantea desde la perspectiva de considerarlas como instrumentos para el aprendizaje de los estudiantes. Esta perspectiva lleva a la introducción de la idea de *demandas cognitivas* y cómo utilizarla para analizar las tareas en función de los objetivos de aprendizaje matemático pretendidos. La descripción y caracterización de dos maneras de uso de la noción de *demandas cognitivas* para el análisis de las tareas se muestra a través de diferentes ejemplos.

Finalmente, la caracterización de las tareas a través del tipo de actividad matemática que pueden potenciar –idea de *demandas cognitivas*– permite introducir tres aspectos relevantes en el análisis de las tareas matemáticas:

- La evolución de la demanda cognitiva de las tareas durante la enseñanza.
- Las consecuencias de cambiar una *tarea*, analizando sus diversas versiones y cuestionándose las diferentes posibilidades de potenciar el aprendizaje matemático.

- Como consecuencia, la introducción de la idea de *variable de tarea* y su relación con la demanda cognitiva.

Noción de *tarea*

Uno de los elementos más importantes para el aprendizaje de las matemáticas son los problemas, las actividades y los ejercicios que el profesor propone a sus estudiantes. Para unificar los términos vamos a denominar *tarea* a las propuestas de acción que los profesores plantean a sus estudiantes para el aprendizaje de las matemáticas. Es decir, el problema o ejercicio según viene reflejado en el libro o material curricular (texto o actividad interactiva en Internet). Denominaremos *actividad* al conjunto formado por la tarea y el sistema de actividades cognitivas individuales y/o sociales desarrolladas por el resolutor (real o hipotético); y *procedimiento* al método de realización de algunas cosas (RAE). Las tareas pueden tener diferentes formas y responder a diferentes objetivos, como se muestra en el ejemplo 1.

Ejemplo 1

1. Escribe un número real comprendido entre:

- $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$

- 1,4142 y 1,4143

- $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{5}$

2. La duración en segundos de las llamadas de una empresa tomadas de un recibo son las siguientes:

120, 131, 142, 157, 15, 27, 94, 57, 62, 12, 49, 58, 149, 210, 131, 120, 97, 84, 61, 32, 15, 7, 21, 32, 238, 210, 48, 56, 139, 24, 64, 31, 23, 58, 69, 234, 13, 66, 54, 214, 156, 179, 231, 204, 147, 32, 15, 7, 64, 56, 73, 114, 169, 201, 134, 62, 93, 42, 58.

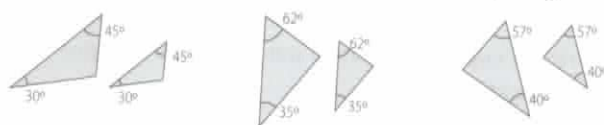
- Agrupa los datos en ocho clases.
- Forma la tabla de frecuencias completa.
- Representa el histograma y el polígono de frecuencias.
- Representa el histograma acumulado y el polígono de frecuencias acumulado.

3. Tarea del bloque de Geometría, 3.º ESO (Fuente: M3 Matemáticas, Editorial Anaya). Ejercicios resueltos.

1. Probar que los polígonos del ejemplo de la página 185 son semejantes.

- Bastará con probar que los tres pares de triángulos correspondientes en los que hemos descompuesto las figuras son semejantes.

Para ello, sólo tenemos que comprobar que tienen dos ángulos iguales en cada caso:



Como los triángulos son semejantes, también lo son las figuras originales.

2. Utilizar la semejanza de los triángulos ACD y AFE para obtener la relación entre la diagonal, d , y el lado, l , de un pentágono regular.

Vamos a probar que los triángulos tienen dos pares de ángulos iguales. Para ello, inscribimos la figura en una circunferencia.

$1' = 1$ porque están inscritos en la circunferencia y abarcan arcos iguales.

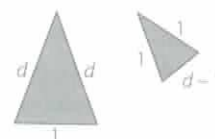
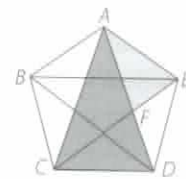
$2' = 2$ por el mismo motivo.

Por tanto, según el criterio anterior, los dos triángulos isósceles son semejantes y sus lados son proporcionales. Si tomamos $l = 1$:

$$\frac{d}{1} = \frac{1}{d-1} \rightarrow d^2 - d = 1 \rightarrow d^2 - d - 1 = 0$$

$$d = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} \rightarrow d = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,618...$$

La relación pedida es: $\frac{d}{l} = \frac{d}{1} = d = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,618...$



Las tareas matemáticas son importantes ya que *determinan* lo que los estudiantes pueden llegar a aprender. En este sentido, las tareas son los instrumentos que utiliza el profesor para que los estudiantes aprendan matemáticas; por lo tanto, existe un vínculo entre el aprendizaje y la gestión de las tareas en el aula. Es decir, no sólo la tarea condicionará su aprendizaje, sino también lo que los estudiantes harán con ella. Por ejemplo, si un estudiante sólo hace multitud de tareas rutinarias con el objetivo de memorizar algoritmos para operar con fracciones de denominador diferente –suma, resta, multiplicación y división–, es posible que lleguen a pensar que aprender matemáticas es seguir instrucciones y resolver las «cuentas» lo más rápida y eficazmente posible. Si las tareas sólo exigen reproducir procedimientos previamente introducidos en clase por el profesor, difícilmente se podrán conseguir otros objetivos.

Una implicación importante desde esta reflexión es que los profesores deben elegir las tareas haciendo *explícitos los objetivos* de aprendizaje que pretenden conseguir. En este sentido, la elección y/o diseño de las tareas por parte del profesor debería apoyarse sobre conjeturas de posibles *trayectorias hipotéticas de aprendizaje* de los estudiantes intentando resolverlas. Esto es una manera de poner de manifiesto la relación entre la forma que adopta una tarea, su gestión en el aula por parte del profesor y los objetivos de aprendizaje pretendidos. Lo que es importante reseñar aquí es que las tareas, por sí mismas, no son suficientes para potenciar un determinado tipo de aprendizaje, pero sí pueden ser consideradas un elemento clave. Las tareas matemáticas son importantes en el proceso de enseñanza porque representan las oportunidades que el profesorado de matemáticas proporciona a

los estudiantes para aprender matemáticas y, por tanto, vinculan la enseñanza y el aprendizaje. Además, las características de las tareas realizadas por el alumnado de secundaria determinan el contenido que aprenden y sus creencias relativas a la naturaleza de las matemáticas y sus aplicaciones. En definitiva, las tareas matemáticas dan a los estudiantes información sobre el significado de determinados conceptos y dirigen su atención hacia un dominio matemático particular.

Desde estas reflexiones iniciales, las tareas deberían:

- Permitir a los estudiantes pensar sobre las situaciones matemáticas más que recordar recetas que deberán seguir.
- Reflejar ideas importantes de las matemáticas y no sólo hechos y procedimientos.
- Permitir a los estudiantes usar su conocimiento previo en alguna medida.

De manera resumida, algunas ideas relevantes que hay que tener en cuenta cuando se quiere hablar de las características de las tareas en las clases de Matemáticas son:

- La relación entre las características de las tareas y los objetivos de aprendizaje que se quieren conseguir.
- La importancia que puede tener la manera en la que el profesor gestiona una determinada tarea en su clase.
- La posibilidad de modificar la exigencia de la tarea (su demanda cognitiva) alterando algunos de sus aspectos.

La selección de las tareas

La selección de tareas para desarrollar la actividad docente en el aula es uno de los cometidos profesionales que tienen mayor impacto en el aprendizaje del alumnado. Para ello, las tareas deben implicar distintos tipos de actividad (ejemplos 2 y 3), como:

- Búsqueda de estrategias de resolución, y análisis de las mismas.

Ejemplo 2

Resuelve el siguiente problema comentando las estrategias que has seguido y analizando su pertinencia para resolverlo:

¿Se puede construir un cuadrado conociendo la longitud de la diagonal? Si tu respuesta es afirmativa, constrúyelo y explica la construcción.

- Desarrollo de procesos de simbolización. Uso de lenguaje algebraico y elaboración de gráficas para la formulación de hipótesis.

Ejemplo

Resuelve
co y de la
Un anu

OPERADO

Redphon

Blackpho

- ¿Qué co
- Expresa
- Represe
- ¿Qué op

De esta m
cial para
de los alu

La den

Como ha
do las tare
actividade
nitiva de l
se entieno
y nivel de
den llegar
dizaje y ll

- Si el
- bási
- das p
- Si el
- mas
- proc
- Si el
- plejas

Las dos tan
educación

Ejemplo 3

Resuelve el siguiente problema y comenta el uso que has hecho en su resolución del lenguaje algebraico y de las gráficas.

Un anuncio de una tienda de telefonía móvil proporciona la siguiente información sobre tarifas de contrato:

OPERADOR	CUOTA FIJA MENSUAL EN €	COSTE EN € POR MINUTO
Redphone	10	0,20
Blackphone	20	0,25

- ¿Qué costaría hablar durante 15 minutos con cada operador?
- Expresa el gasto mensual en función de los minutos hablados.
- Representa gráficamente la función correspondiente a cada operador.
- ¿Qué operador es más económico? ¿Por qué?

De esta manera, la actividad que va a desarrollar el estudiante constituye una referencia inicial para el análisis de tareas, ya que permite seleccionar tareas y analizar las producciones de los alumnos.

La demanda cognitiva de una tarea

Como habíamos indicado, no todas las tareas se eligen o diseñan con el mismo fin. Variando las tareas con respecto a diferentes características es posible producir diferentes tipos de actividades matemáticas. Lo que la tarea exige a los estudiantes determina la demanda cognitiva de la tarea y en parte su potencial de aprendizaje. Por demanda cognitiva de una tarea se entiende la *clase y nivel de pensamiento* que su resolución exige a los alumnos. La clase y nivel de pensamiento en el que se implican los estudiantes determinará lo que ellos pueden llegar a aprender. Así, las tareas se tienen que corresponder con los objetivos de aprendizaje y llegar a reflejar un amplio rango de ellos. Por ejemplo:

- Si el objetivo es *aumentar la habilidad y eficacia de los alumnos en recordar hechos básicos*, definiciones y reglas (recuperarlos de la memoria), entonces tareas apropiadas pueden ser actividades que estén centradas en la memorización.
- Si el objetivo es *aumentar la rapidez y exactitud de los estudiantes en resolver problemas rutinarios*, entonces pueden ser apropiadas actividades centradas en el uso de procedimientos sin necesidad de poseer un «sentido conceptual» de los mismos.
- Si el objetivo es *hacer que los estudiantes se impliquen en formas de razonamiento más complejas y desarrollar destrezas de comunicación*, es necesario proponer otro tipo de tareas.

Las dos tareas siguientes pertenecen al bloque temático de Geometría en el primer ciclo de educación secundaria obligatoria (ESO), la del ejemplo 4 pide a los alumnos que construyan

triángulos con regla y compás cuando se les proporciona las medidas de los lados. Esta tarea tiene un fuerte carácter procedimental y requiere que el estudiante sea capaz de seguir unos pasos usando regla y compás y de recordar definiciones de triángulos, pero no exige ninguna movilización de los significados de los objetos geométricos de los que trata.

Ejemplo 4

Sigue los pasos siguientes y dibuja un triángulo cuyos lados midan, 5 cm, 6 cm y 6 cm.

Para ello sigue el siguiente procedimiento:

- Dibuja con la regla un segmento AB de 5 cm.
- Abre el compás y traza un arco, primero desde el punto A y después desde el punto B .
- Llama C al punto donde se cortan los dos arcos. Une el punto C con A y B .

¿Cómo es el triángulo que has trazado según los lados? ¿Y según sus ángulos? ¿Qué has trazado según sus lados?, ¿y según sus ángulos?

Sin embargo, la actividad del ejemplo 5 es más abierta en el sentido de posibilitar generar varios procedimientos de solución. Además, en los procesos de construcción, esta tarea permite identificar las propiedades o relaciones geométricas para justificar el proceso de construcción.

Ejemplo 5

Construye triángulos isósceles utilizando diferentes procedimientos. Describe los procedimientos utilizados.

- Indica qué elementos geométricos usas en cada procedimiento.
- Justifica tus respuestas con el fin de convencer a tus compañeros de la idoneidad de los procesos utilizados.

La tarea de construcción del ejemplo 5 posibilita explicitar a los estudiantes «el conocimiento geométrico» que la justifica, por lo que el significado de la «construcción geométrica» puede emerger desde la forma en que se realiza la actividad de construir y la actividad de discusión matemática relacionada. La idea de demanda cognitiva de una tarea permite centrar la atención en lo que le exige al resolutor. De esta manera, el foco se sitúa en lo que el estudiante tiene que hacer:

- Reproducir/memorizar.
- Aplicar procedimientos sin conexión.
- Considerar el significado de los procedimientos y los conceptos.
- Establecer relaciones y coordinar significados («hacer matemáticas»).

Sin embargo, no tienen un valor absoluto las valoraciones de las tareas según la actividad matemática que potencialmente pueden ayudar a generar. Dependen del conocimiento previo de los estudiantes, de las pequeñas modificaciones que el profesor pueda hacer y de la manera

en la que el profesor modifica las tareas –modificación que el profesor puede hacer para centrar la atención en los estudiantes. Existen muchas tareas, nosotros

El Programme for International Student Assessment (PISA) en las tareas

- *Primer nivel*: tareas que requieren la aplicación de propiedades de operaciones.
- *Segundo nivel*: tareas que requieren la aplicación de propiedades de operaciones más complejas.
- *Tercer nivel*: tareas que requieren la aplicación de propiedades de operaciones para resolver problemas de creatividad y explicación.

Actividad 1

Busca tareas en Internet marcadas por PISA.

- OCDE (2006). *La evaluación y el aprendizaje en matemáticas* (INEC). Monografía.

Si no la encuentras...

Por otra parte, según la demanda cognitiva de las tareas, se pueden clasificar en diferentes aspectos:

- *Nivel 1*: tareas que requieren la aplicación de propiedades de operaciones.
- *Nivel 2*: tareas que requieren la aplicación de propiedades de operaciones más complejas.
- *Nivel 3*: tareas que requieren la aplicación de propiedades de operaciones para resolver problemas de creatividad y explicación.
- *Nivel 4*: tareas que requieren la aplicación de propiedades de operaciones para resolver problemas de creatividad y explicación.

en la que el profesor pueda llegar a plantearla en el aula. Aunque estas dos últimas cuestiones –modificación e implementación– serán tratadas en las próximas secciones, hay que indicar que el potencial de la idea de *demanda cognitiva* para el análisis de las tareas permite centrar la atención sobre el papel de la tarea como instrumento para el aprendizaje de los estudiantes. Existen diferentes concreciones de la idea de *demanda cognitiva* para el análisis de las tareas, nosotros aquí presentamos dos como ejemplos del uso de esta perspectiva.

El Programme for International Student Assessment (PISA) considera tres niveles de exigencia en las tareas que plantean (OCDE, 2003):

- *Primer nivel: reproducción y procedimientos rutinarios.* Ejercicios relativamente familiares que requieren la reiteración de los conocimientos practicados (recuerdos de propiedades, uso de procedimientos rutinarios, aplicación de algoritmos, realización de operaciones sencillas...).
- *Segundo nivel: conexiones e integración para resolver problemas estándar.* Plantean mayores exigencias para su interpretación y requieren establecer relaciones entre distintas representaciones de una misma situación.
- *Tercer nivel: razonamiento, argumentación, intuición y generalización para resolver problemas originales (reflexión).* Los ítems requieren cierta comprensión y reflexión, creatividad para identificar conceptos o enlazar conocimientos. Exige generalización y explicación o justificación de los resultados.

Actividad 1

Busca tareas en los materiales de que dispongas e intenta encontrar al menos una de cada nivel marcado por PISA. Consulta:

- OCDE (2003). *Programme for International Student Assessment*. Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) - Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo (INECSE) (2005) PISA 2003. Pruebas de matemáticas y de Solución de Problemas. Monografía SUMA 03.

Si no la encuentras, trata de diseñarla.

Por otra parte, Stein y colaboradores (Smith y Stein, 1998) utilizan el nivel de demanda cognitiva de las tareas para diferenciarlas según el potencial que puedan tener para desarrollar diferentes aspectos del aprendizaje:

- *Nivel 1:* tareas de memorización.
- *Nivel 2:* tareas de procedimientos sin conexión.
- *Nivel 3:* tareas de procedimientos con conexión.
- *Nivel 4:* tareas que requieren «hacer matemáticas».

Caracterizados de la siguiente manera:

- Nivel 1: *tareas/actividades de memorización*.
 - Implican reproducir fórmulas, reglas, hechos o definiciones previamente aprendidas o dirigidas a memorizar fórmulas, reglas, hechos o definiciones.
 - No son ambiguas, implican reproducir exactamente algo previamente visto, y lo que tiene que ser reproducido está clara y directamente establecido.
 - No ponen en evidencia los conceptos o significados que subyacen a los hechos, reglas, fórmulas o definiciones que están siendo aprendidas o reproducidas.
- Nivel 2: *tareas/actividades de procedimientos sin conexión*.
 - Son algorítmicas. El uso de un procedimiento es específicamente reclamado o su uso está evidentemente basado en la instrucción previa, la experiencia o el lugar de la actividad/tarea en la programación.
 - Requieren una demanda cognitiva limitada para realizarla con éxito. Existe poca ambigüedad en lo que se necesita hacer y cómo hay que hacerlo.
 - No tienen conexión con los conceptos o significados que subyacen al procedimiento que está siendo usado.
 - Están centradas en producir respuestas correctas más que en desarrollar comprensión matemática.
 - No requieren explicaciones, o sólo explicaciones que se centran en describir el procedimiento usado.
- Nivel 3: *tareas/actividades de procedimientos con conexión*.
 - Se centran en el significado de la noción o procedimiento. Focalizan la atención de los estudiantes en el uso de procedimientos con el propósito de desarrollar la comprensión de los conceptos e ideas matemáticas.
 - Sugieren caminos (explícita o implícitamente) que son procedimientos generales que tienen conexiones estrechas con las ideas conceptuales como opuesto a algoritmos, que son opacos en relación con los conceptos que subyacen.
 - De manera usual, se representan en múltiples formas (por ejemplo, diagramas visuales, material concreto, símbolos, situaciones problemáticas). El establecimiento de conexiones entre múltiples representaciones ayuda a desarrollar el significado.
 - Requieren algún grado de esfuerzo cognitivo. Aunque se pueden utilizar procedimientos generales, no es posible hacerlo sin pensar. Los estudiantes necesitan implicarse con las ideas conceptuales que subyacen a los procedimientos para realizar con éxito la tarea/actividad.
- Nivel 4: *tareas/actividades que requieren «hacer matemáticas»*.
 - Requieren un pensamiento complejo y no algorítmico (por ejemplo, no existe una aproximación a la realización de la tarea/actividad bien definida de antemano que pueda recordarse, o un camino que sea explícitamente sugerido por la tarea/actividad o la instrucción previa).

Las tareas
algoritmo
tudiantes
ya que de
fracciones
nominado
ciones y
tareas no
matemática
a ser eficaz

Por otra p
«pensar»
se pueden
minar el t
algoritmo
aproximar
tenciar las
za con las
uso de pro
dos de los
reflexión s
tica como

Por otra p
nexiones e
tareas del

- Requieren que los estudiantes exploren y comprendan los conceptos, procesos o relaciones matemáticas.
- Demandan autorregulación del aprendizaje. Exigen a los alumnos tanto generar una respuesta que precisa comprensión conceptual de la noción matemática, como comprobar y explicar la respuesta producida.
- Requieren que los estudiantes accedan a conocimiento y experiencias relevantes, y que hagan un uso apropiado de ellas al trabajar a lo largo de la tarea.
- Requieren que los estudiantes analicen la tarea y examinen atentamente sus condiciones, que puede que limiten las posibles estrategias de solución y las propias soluciones.
- Requieren considerable esfuerzo cognitivo, y pueden implicar cierto nivel de ansiedad para el estudiante debido a la naturaleza no predecible del proceso de resolución requerido.

Las tareas de demanda cognitiva baja consisten en la *memorización y aplicación rutinaria* de algoritmos. Por ejemplo, podría considerarse en este grupo una tarea en la que se pide a los estudiantes realizar operaciones con fracciones aplicando los algoritmos de cálculo ya estudiados, ya que demanda del estudiante repetir las reglas que le permiten realizar las operaciones con fracciones, la distributiva respecto a la suma y la resta, la suma y resta de fracciones con denominador diferente, el signo delante de los paréntesis, la multiplicación y la división de fracciones y el orden y prioridad de las operaciones aritméticas. Así como están planteadas, las tareas no exigen por parte de los estudiantes una comprensión más profunda de los contenidos matemáticos involucrados. Este tipo de tareas se usa con el objetivo de que el estudiante llegue a ser eficaz y rápido en el manejo de los algoritmos y procedimientos.

Por otra parte, las tareas de *procedimientos con conexión* requieren a los estudiantes tener que «pensar» en las relaciones existentes entre las operaciones con fracciones, y de qué manera se pueden justificar los pasos en los algoritmos y procedimientos usados. Por ejemplo, determinar el tamaño de una fracción resultante, llegar a justificar usando cuadrículas por qué el algoritmo de la multiplicación de fracciones funciona de la manera en que lo hace o usar aproximaciones algebraicas para justificar el algoritmo de la división. Además, se pueden potenciar las relaciones entre las fracciones y los decimales, poniendo de manifiesto la semejanza con las operaciones con decimales. Aunque las tareas de demanda alta también exigen el uso de procedimientos y algoritmos, éstos están más claramente asociados con los significados de los conceptos. Asimismo, la implementación de este tipo de tareas en el aula exige una reflexión sobre lo que se está haciendo, así como el desarrollo de la comunicación matemática como una componente de la competencia matemática.

Por otra parte, las tareas de demanda cognitiva alta (nivel 4) requieren hacer uso de *conexiones entre los conceptos*. Por ejemplo, en el bloque de Funciones podemos encontrar tareas del tipo «construir», en el sentido de que se refieren al acto de generar algo nuevo:

construir una gráfica a partir de una ecuación, construir una gráfica a partir de una tabla de datos o desde la descripción de una situación, o construir una ecuación a partir de una gráfica y/o tabla de datos. Ejemplos de este tipo de tareas son las siguientes actividades.

Actividad 2

Busca tareas en los materiales de que dispongas e intenta encontrar al menos una por cada uno de los 4 niveles marcados por los autores citados. Si no la encuentras, trata de diseñarla.

Actividad 3

Resuelve los dos problemas siguientes y comenta el nivel de dificultad de los mismos siguiendo las dos clasificaciones dadas.

1. La depreciación del coche, que puedes encontrar en:

- SHELL CENTRE FOR MATHEMATICAL EDUCATION (1990). *El lenguaje de funciones y gráficas*. Bilbao: MEC-Servicio Editorial Universidad del País Vasco.

«Cuando mi coche era nuevo me costó 23.000 €. Su valor se está depreciando a un ritmo del 20% anual. Esto quiere decir que después de un año su valor era:

$$23.000 \times 0.8 = 18.400 \text{ €}$$

Y después de dos años su valor será:

$$18.400 \times 0.8 = 14.720 \text{ €}$$

¿Cómo continuará cambiando su valor?»

2. El coste de una ventana cuadrada depende de su tamaño, que puedes encontrar en:

- AZCÁRATE, C. y DEULOFEU, J. (1990). *Funciones y gráficas*. Madrid: Síntesis.

«El precio del cristal es de 12 euros por dm^2 , y el del marco, 24 euros por dm ¿cuánto costará una ventana de 7 dm, de 1 m y de 1,5 m?

Construye una tabla, con los datos anteriores y otros que elijas, que dé el coste según la longitud del lado de la ventana.

Sitúa los valores de la tabla anterior en una gráfica.

Escribe una fórmula que dé el coste, conocida la longitud del lado.»

Este tipo de actividades son «aligeradas» en la actualidad por el uso de las calculadoras gráficas, pero permiten moverse hacia una interpretación de una conducta global y generalizar desde una gráfica o desde un número determinado de gráficas que comparten una característica común. La construcción se diferencia de la interpretación en que requiere generar nuevas partes que no son dadas y, debido a la dificultad de construir una ecuación desde una gráfica, este tipo de tareas suele aparecer menos. El cuadro 1 (en la página siguiente) resume las características de los niveles de demanda cognitiva descritos (Smith y Stein, 1998).

Cuadro 1. Car.

DEMANDAS D

Tareas de me

- Implicar...
- chos o de...
- das que d...
- No son an...
- producido...
- Ejemplo:
- «A un gru...
- les han he...
- guntado s...
- resultados

Chicas

Chicos

Elegida un...

babilidad o

a un alum

• No poner

nificados

fórmulas

aprendido

Tareas de pr

• Son algo

miento e

• Hay poca

debe hac

Ejemplo:

«Construy

dos midar

prendido

135° resp

• No pone

significad

miento.

• Pretender

basadas e

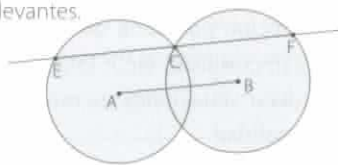
desarrolla

• No requie

ciones qu

dimiento

Cuadro 1. Características de los niveles de demanda cognitiva de las tareas

DEMANDAS DE NIVEL BAJO	DEMANDAS DE NIVEL ALTO									
Tareas de memorización • Implican reproducir fórmulas, reglas, hechos o definiciones previamente aprendidas que deben ser memorizadas. • No son ambiguas, lo que tiene que ser reproducido está claramente establecido. Ejemplo: «A un grupo de estudiantes de 3.º de ESO les han hecho una encuesta y les han preguntado sobre su afición al baloncesto. Los resultados obtenidos son:	Tareas de procedimientos con comprensión • El uso del procedimiento tiene la finalidad de aumentar la comprensión de los conceptos. • Sugieren caminos que tienen conexiones estrechas con los conceptos. Usualmente se representan de formas distintas: diagramas, material concreto, símbolos. Realizando conexiones se desarrolla el concepto. Ejemplo: «Los estudiantes de la clase de 2.º A han contestado a la pregunta: "¿Qué bocadillo prefieres para almorzar?" Obteniéndose el siguiente resultado: Tomate: 6 Queso: 10 Jamón: 12									
<table><tr><th></th><th>LES GUSTA EL BALONCESTO</th><th>NO LES GUSTA EL BALONCESTO</th></tr><tr><td>Chicas</td><td>6</td><td>4</td></tr><tr><td>Chicos</td><td>10</td><td>7</td></tr></table> Elegida una alumna al azar, ¿cuál es la probabilidad de que le guste el baloncesto?, ¿y a un alumno?» • No ponen en evidencia los conceptos o significados que subyacen a los hechos, reglas, fórmulas o definiciones que están siendo aprendidas o reproducidas.		LES GUSTA EL BALONCESTO	NO LES GUSTA EL BALONCESTO	Chicas	6	4	Chicos	10	7	Sobre la base de esta información, ¿qué porcentaje de cada clase de bocadillos debería preparar el encargado de la cafetería?» Requieren algún grado de esfuerzo cognitivo, hay que relacionar conceptos, no se pueden utilizar sin pensar.
	LES GUSTA EL BALONCESTO	NO LES GUSTA EL BALONCESTO								
Chicas	6	4								
Chicos	10	7								
Tareas de procedimientos sin conexión • Son algorítmicas. El uso de un procedimiento es evidente. • Hay poca ambigüedad sobre lo que se debe hacer y cómo hay que hacerlo. Ejemplo: «Construye un triángulo en el que los tres lados midan 7, 14 y 10 cm, y los ángulos comprendidos entre los tres lados midan 30º y 135º respectivamente».	Tareas de procedimientos con comprensión • Requieren un pensamiento no algorítmico y complejo, no existe un camino que pueda ser recordado o indicado por la actividad. • Exige que los estudiantes exploren y comprendan los conceptos, procesos o relaciones matemáticas implicadas. • Requiere que los estudiantes accedan a conocimientos relevantes. Ejemplo:									
• No pone en evidencia los conceptos o significados que subyacen en el procedimiento. • Pretenden producir respuestas correctas, basadas en la instrucción previa más que en desarrollar comprensión. • No requieren explicaciones, o solo explicaciones que se centran en describir el procedimiento usado.	 «Por C se traza una paralela al segmento AB. ¿Qué relación existe entre la longitud de AB y de EF?» • Requiere que sean examinadas atentamente las condiciones implícitas en la estructura. Requieren un considerable esfuerzo cognitivo y pueden implicar ansiedad.									

Evolución de la demanda cognitiva de las tareas durante la enseñanza

Es necesario examinar la evolución de las tareas durante el desarrollo del currículo. El propio texto de la administración, al referirse a los contenidos de matemáticas de secundaria obligatoria, indica el potencial de los mismos para el establecimiento de conexiones conceptuales y las posibilidades para los estudiantes para conseguir resultados y procesos de nivel alto de demanda cognitiva. Así, por ejemplo, el «Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Enseñanza Secundaria Obligatoria» para el bloque de Geometría se indica:

La geometría, además de un conjunto de definiciones y fórmulas para el cálculo de superficies y volúmenes, es, sobre todo, describir y analizar propiedades y relaciones, y clasificar y razonar sobre formas y estructuras geométricas. El aprendizaje de la geometría debe ofrecer continuas oportunidades para construir, dibujar, modelizar, medir o clasificar... (BOE, 2007, p. 751)

A través de los cuatro cursos de la educación secundaria se pretende que los estudiantes *hagan matemáticas*, que *matematicen* algunos aspectos de su entorno.

La *matematización* es el proceso de construcción de un modelo matemático (por ejemplo, la idea de eje de simetría). Un modelo matemático se define como la organización sistemática de un conjunto de conceptos matemáticos (eje de simetría: equidistancia, mediatriz, perpendicular). La *concretización* es el proceso inverso a la matematización y es el proceso de transferir un modelo matemático a la realidad (¿de qué manera podemos agrupar las formas de las señales de tráfico que reflejan algún eje de simetría? ¿Podemos usar la idea de eje de simetría para clasificar formas de insectos?).

Por otra parte, el *proceso de matematizar* se apoya en un uso adecuado del lenguaje. Tanto la matematización como la concretización deben ir desarrollándose en un proceso dialéctico continuo y cada vez cualitativamente superior (introducción paulatina de terminología, introducción paulatina de procesos cognitivos cada vez más exigentes: desde describir a analizar, clasificar, etc.). Esta interacción del ciclo matematización-concretización obliga a considerar situaciones sucesivas que permitan una evolución del conocimiento y dominio de la realidad.

En el proceso de hacer matemáticas conocido como *matematización* se identifican dos procesos (OCDE, 2003):

- Matematización horizontal: traducir los problemas desde el mundo real al matemático.

- Matem...
- plante...

La matem...

- Identifi...
- Repres...
- Comp...
- Encon...
- Recon...
- Traduc...
- Utiliza...

La matemáti...

- Utiliza...
- Usar e...
- Refinar...
- Argum...
- Genera...

En el ejempl...

Ejemplo 6

En un períodi...
cada repartido...
por pizza repa...
es la mejor.

Actividad 4

Resuelve este...
ción. Indica es...
matematizació...

El cuadro 2 (e...
que reflejan...
pueden ser re...
comprender l...

- **Matematización vertical:** una vez traducido a una expresión matemática se pueden plantear cuestiones en las que utiliza conceptos y destrezas matemáticas.

La *matematización horizontal* se sustenta sobre actividades como:

- Identificar las matemáticas que puedan ser relevantes respecto al problema.
- Representar el problema de modo diferente.
- Comprender la relación entre los lenguajes natural, simbólico y formal.
- Encontrar regularidades, relaciones y patrones.
- Reconocer isomorfismos con otros problemas ya conocidos.
- Traducir el problema a un modelo matemático.
- Utilizar herramientas y recursos adecuados.

La *matematización vertical* incluye:

- Utilizar diferentes representaciones.
- Usar el lenguaje simbólico, formal y técnico y sus operaciones.
- Refinar y ajustar los modelos matemáticos, combinar e integrar modelos.
- Argumentar.
- Generalizar.

En el ejemplo 6 se presenta una tarea propuesta a unos estudiantes de secundaria.

Ejemplo 6

En un periódico local han aparecido unas ofertas de empleo para repartir pizzas. La pizzería A paga a cada repartidor 0,60€ por pizza repartida y una cantidad fija de 60€ al mes. La pizzería B paga 0,90€ por pizza repartida y 24,00€ fijos al mes. ¿Qué oferta te parece la mejor? Explica por qué tu elección es la mejor.

Actividad 4

Resuelve este problema y compara tu respuesta con las que se ofrecen y comentan a continuación. Indica especialmente dónde reconoces aspectos de *matematización horizontal* y dónde de *matematización vertical*.

El cuadro 2 (en la página siguiente) muestra la respuesta de unos alumnos de 4.º de la ESO que reflejan aspectos de la *matematización horizontal* al identificar las matemáticas que pueden ser relevantes respecto al problema, representar el problema de modo diferente y comprender la relación entre los lenguajes natural, simbólico y formal.

Cuadro 2. Respuesta a la tarea del ejemplo 6

Pizzeria APizza entregada $\rightarrow 0,6$ €Cantidad fija $\rightarrow 60$ € al mes**Pizzeria B**Pizza entregada $\rightarrow 0,9$ €Cantidad fija $\rightarrow 24$ € al mes

Suponemos que la pizzeria A y B han repartido lo mismo (100 pizzas al mes).

Pizzeria A $\rightarrow 60$ € por pizzas entregadas $\frac{60}{100}$ € al mes $\frac{60}{100} = 0,6$ € cada mesPizzeria B $\rightarrow 90$ € por pizzas entregadas $\frac{90}{100}$ € al mes $\frac{90}{100} = 0,9$ € cada mes

La pizzeria A es la mejor oferta.

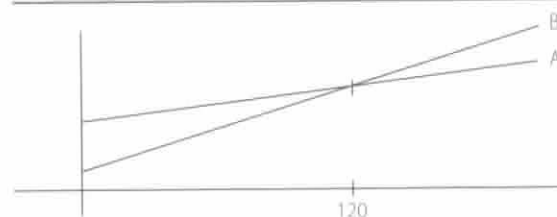
Por otra parte, la respuesta del cuadro 3 muestra rasgos de procesos de matematización vertical al utilizar diferentes representaciones:

- Usar el lenguaje simbólico, formal y técnico y sus operaciones.
- Refinar y ajustar los modelos matemáticos, combinar e integrar modelos.
- Argumentar.
- Generalizar.

Cuadro 3. Respuesta a la tarea propuesta en el ejemplo 6 que refleja aspectos de proceso de matematización vertical

Pizza A $\rightarrow 0,6$ € $\rightarrow 60$ € fijosPizza B $\rightarrow 0,9$ € $\rightarrow 24$ € fijos

Cantidad de pizzas	1	2	n
Oferta A	60,6	61,2	$0,6n + 60$
Oferta B	24,9	25,8	$0,9n + 24$



Si pensamos en repartir menos de 120 pizzas es más interesante la oferta A.

En el cuadro 4 se describen algunas características del proceso de matematización del paso de un curso a otro referidos a contenidos de Geometría correspondientes a las figuras planas.

Cuadro 4. Ejemplo

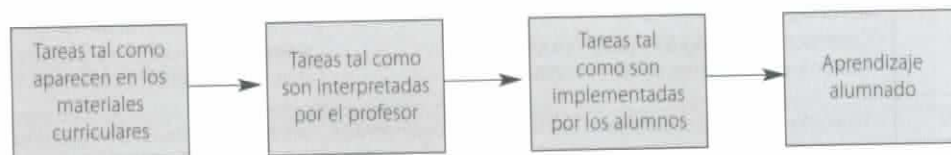
CURSO ESO	CONTENIDOS CURRICULARES
1.º	• Descripción de figuras planas: triángulos, cuadriláteros, polígonos. • Clasificación de las figuras planas a partir de sus propiedades. • Construcción de figuras planas con los instrumentos adecuados.
2.º	• Triángulos y cuadriláteros. Justificación de sus propiedades. • Idea de semejanza y dilatación y sus aplicaciones en la vida cotidiana.
3.º	• Aplicación de los conocimientos adquiridos a la resolución de problemas. • Uso de la geometría en la representación de figuras planas.
4.ºA	• Aplicación de los conocimientos adquiridos a la resolución de problemas. • Teorema de Pitágoras y sus aplicaciones en la geometría. • Utilización de la geometría en la vida cotidiana. • Iniciación en el uso de la geometría en la vida cotidiana.
4.ºB	• Figuras semejantes y áreas de figuras semejantes. • Razones trigonométricas y su aplicación en la vida cotidiana. • Relación entre la geometría y la física. • Aplicación de los conocimientos adquiridos a la resolución de problemas.

Cuadro 4. Ejemplo de evolución de un proceso de matematización

CURSO ESO	CONTENIDOS CURRICULARES	NIVEL DE DEMANDA DE LAS TAREAS	EXPLICACIÓN DE LAS CATEGORÍAS
1.º	- Descripción de las figuras planas elementales: triángulos, cuadriláteros, polígonos regulares. - Clasificación de triángulos y cuadriláteros a partir de diferentes criterios. Estudio de sus propiedades, características y relaciones en estos polígonos. - Construcción de triángulos y polígonos regulares con los instrumentos de dibujo habituales.	Procedimientos con conexión.	Las tareas se deben centrar en los procedimientos. Es decir, tareas que requieren una comprensión de los conceptos y el establecimiento de relaciones inclusivas entre ellos a partir de sus características. Conllevan también el uso de diferentes representaciones y la conversión de unos sistemas a otros.
2.º	- Triángulos rectángulos. El teorema de Pitágoras. Justificación geométrica y aplicaciones. - Idea de semejanza: figuras semejantes. Ampliación y reducción de figuras; razón de semejanza y escalas. Razón entre las superficies de figuras semejantes.	Procedimientos con conexión.	Se introduce el uso de la medida para matematizar relaciones entre longitudes y áreas. Las tareas se centran en el uso de procedimientos explicados previamente en contextos significativos, implican diferentes pasos y uso de diagramas y símbolos.
3.º	- Aplicación de los teoremas de Tales y Pitágoras a la resolución de problemas geométricos y del medio físico. - Uso de los movimientos para el análisis y representación de figuras y configuraciones geométricas.	Hacer matemáticas.	El proceso de matematización se hace más complejo porque se centra en las aplicaciones y transformaciones. No hay procesos previstos.
4.ºA	- Aplicación de la semejanza de triángulos y el teorema de Pitágoras para la obtención indirecta de medidas. Resolución de problemas geométricos frecuentes en la vida cotidiana. - Utilización de otros conocimientos geométricos en la resolución de problemas del mundo físico: medida y cálculo de longitudes y áreas. - Iniciación a la geometría analítica plana: coordenadas de un punto; distancia entre dos puntos.	Hacer matemáticas.	Se hace énfasis en las aplicaciones al mundo real. Requieren explicaciones. Se introducen otros modelos matemáticos. Se da la interacción matematización-concretización.
4.ºB	- Figuras semejantes: razón entre longitudes y áreas de figuras semejantes. - Razones trigonométricas de un ángulo agudo. Relaciones entre ellas. - Relaciones métricas en los triángulos. Resolución de triángulos rectángulos. - Aplicación de los conocimientos geométricos a la resolución de problemas métricos en el mundo físico: medida de longitudes y áreas.	Hacer matemáticas.	Las tareas conllevan, además, nuevos signos matemáticos: las razones trigonométricas, que tienen la dificultad añadida correspondiente a la comprensión del desarrollo de los signos matemáticos.

La selección de tareas de demanda de nivel alto no garantiza un nivel alto de razonamiento de los estudiantes. Debemos considerar también la evolución de una tarea durante su implementación en el aula e indagar si se mantiene con el nivel de exigencia cognitiva con el que había sido seleccionada. Stein y otros (2000, p. 4) identifican fases (cuadro 5) en las que se puede alterar el nivel de demanda cognitiva de una tarea durante el proceso de enseñanza.

Cuadro 5. Fases en las que se puede modificar la demanda cognitiva de la tarea



Actividad 5

En el párrafo anterior se afirma que: «La selección de tareas de demanda de nivel alto no garantiza un nivel alto de razonamiento de los estudiantes.» Pon un ejemplo en el que pueda verse cómo una tarea de un nivel alto pierde dicho carácter por la forma en la que se plantea. Intenta inferir qué consecuencias pueden derivarse de esta reflexión para la práctica de aula.

Evolución del nivel de demanda en procesos de simbolización

Los procesos cognitivos relativos a la formación de conceptos como *abstracción*, *simbolización*, *búsqueda de relaciones entre conceptos*, *generalizaciones*, etc., son ejemplos de tareas de demanda alta que tienen que realizar los estudiantes de Matemáticas de educación secundaria. Por ejemplo, en los procesos de enseñanza y aprendizaje del concepto de *potencia*, que promueven los libros de texto, no siempre se mantiene el nivel de los procesos de abstracción asociados al desarrollo de los signos matemáticos. Así, la ampliación del significado del concepto de *potencia* requiere estrategias que están presentes en todos los libros de texto y se pueden considerar que constituyen la *fenomenología del concepto*. Estas estrategias son:

- *Uso de ejemplos*: ilustrar determinadas características del concepto o de sus propiedades, de manera que dichas características son percibidas como intrínsecas.

$$(-5)^2 \cdot (-5)^3 = [(-5) \cdot (-5)] \cdot [(-5) \cdot (-5) \cdot (-5)] = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = (-5)^5 = (-5)^{2+3}$$
- *Aplicación a tareas simples*: aplicación directa de una definición o propiedad para la resolución de tareas, con el objetivo de desarrollar algún algoritmo, sin referencia a contextos específicos.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b} = \frac{a^3}{b^3}$$

- *Participación* para la...
«Pot...
tores
- *Simbolización* tar la...
- *Manipulación* «Esc...

Estas tareas...
el estableci...
méricos con...
enteros o ra...

Actividad 6

Intenta prop...
secundaria.

Otras tareas...
exigencia c...

- *Resolución* sobre...
«Los...
Hem...
Leuc...
Hall...
sang...
• *Formulación* cione...
minac...
«Inv...
el sig...

Si estas tare...
fesorado de...
tos que pre...

- **Particularización:** estudio del concepto o de sus propiedades en un caso particular para hacerlo más concreto.

«Potencia de exponente entero positivo (1, 2, 3...) son fáciles de interpretar, el número de factores coincide con el exponente:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$$

- **Simbolización:** utilización de signos (numéricos, letras, dibujos, gráficos...) para denotar la idea matemática.

$$(a^n \cdot b^n) = (a \cdot b)^n$$

- **Manipulación de signos:** realización del tratamiento o conversión de representaciones.
«Escribe las siguientes expresiones con un único exponente: $(6^2)^4$ y $(3^5)^3$ »

Estas tareas conllevan un nivel bajo de demanda cognitiva al alumnado, pues se basan en el establecimiento de conexiones con objetos matemáticos ya conocidos en conjuntos numéricos concretos. Son aplicaciones de las propiedades del producto de números naturales, enteros o racionales para dar significado a la potencia.

Actividad 6

Intenta proponer actividades para cada uno de los procesos descritos pensando en alumnado de secundaria.

Otras tareas que forman la *fenomenología del concepto* de potencia y que conllevan una exigencia cognitiva alta son las tareas de resolución y planteamiento de problemas.

- **Resolución de problemas:** realización de tareas cuya resolución requiere la reflexión sobre el uso de estrategias que utilizar:

«Los resultados de una analítica de una persona indican:

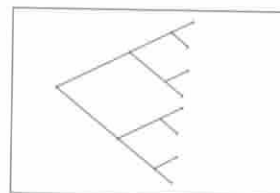
Hematíes: $5,5 \times 10^6$ por cada mm^3

Leucocitos: $7,5 \times 10^6$ por cada mm^3

Halla la cantidad de hematíes y de leucocitos que tiene, sabiendo que contiene 5 litros de sangre.»

- **Formulación de problemas:** planteamiento de situaciones problemáticas que conlleven el uso de determinados conceptos o propiedades:

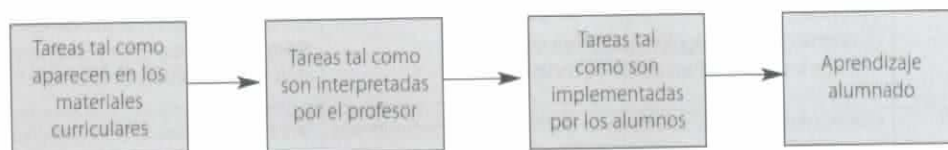
«Inventa un problema cuya resolución se corresponda con el siguiente diagrama:»



Si estas tareas conllevan una demanda alta y son interpretadas e implementadas por el profesorado de manera que se anima al alumnado a su resolución, y no se varían los aspectos que presentan mayor exigencia cognitiva, el nivel del razonamiento desarrollado por los

La selección de tareas de demanda de nivel alto no garantiza un nivel alto de razonamiento de los estudiantes. Debemos considerar también la evolución de una tarea durante su implementación en el aula e indagar si se mantiene con el nivel de exigencia cognitiva con el que había sido seleccionada. Stein y otros (2000, p. 4) identifican fases (cuadro 5) en las que se puede alterar el nivel de demanda cognitiva de una tarea durante el proceso de enseñanza.

Cuadro 5. Fases en las que se puede modificar la demanda cognitiva de la tarea



Actividad 5

En el párrafo anterior se afirma que: «La selección de tareas de demanda de nivel alto no garantiza un nivel alto de razonamiento de los estudiantes.» Pon un ejemplo en el que pueda verse cómo una tarea de un nivel alto pierde dicho carácter por la forma en la que se plantea. Intenta inferir qué consecuencias pueden derivarse de esta reflexión para la práctica de aula.

Evolución del nivel de demanda en procesos de simbolización

Los procesos cognitivos relativos a la formación de conceptos como *abstracción*, *simbolización*, *búsqueda de relaciones entre conceptos*, *generalizaciones*, etc., son ejemplos de tareas de demanda alta que tienen que realizar los estudiantes de Matemáticas de educación secundaria. Por ejemplo, en los procesos de enseñanza y aprendizaje del concepto de *potencia*, que promueven los libros de texto, no siempre se mantiene el nivel de los procesos de abstracción asociados al desarrollo de los signos matemáticos. Así, la ampliación del significado del concepto de *potencia* requiere estrategias que están presentes en todos los libros de texto y se pueden considerar que constituyen la *fenomenología del concepto*. Estas estrategias son:

- *Uso de ejemplos*: ilustrar determinadas características del concepto o de sus propiedades, de manera que dichas características son percibidas como intrínsecas.
 $(-5)^2 \cdot (-5)^3 = [(-5) \cdot (-5)] \cdot [(-5) \cdot (-5) \cdot (-5)] = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = (-5)^5 = (-5)^{2+3}$
- *Aplicación a tareas simples*: aplicación directa de una definición o propiedad para la resolución de tareas, con el objetivo de desarrollar algún algoritmo, sin referencia a contextos específicos.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b} = \frac{a^3}{b^3}$$

- **Particularización:** estudio del concepto o de sus propiedades en un caso particular para hacerlo más concreto.

«Potencia de exponente entero positivo (1, 2, 3...) son fáciles de interpretar, el número de factores coincide con el exponente:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$$

- **Simbolización:** utilización de signos (numéricos, letras, dibujos, gráficos...) para denotar la idea matemática.

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

- **Manipulación de signos:** realización del tratamiento o conversión de representaciones.

«Escribe las siguientes expresiones con un único exponente: $(6^2)^4$ y $(3^5)^3$ »

Estas tareas conllevan un nivel bajo de demanda cognitiva al alumnado, pues se basan en el establecimiento de conexiones con objetos matemáticos ya conocidos en conjuntos numéricos concretos. Son aplicaciones de las propiedades del producto de números naturales, enteros o racionales para dar significado a la potencia.

Actividad 6

Intenta proponer actividades para cada uno de los procesos descritos pensando en alumnado de secundaria.

Otras tareas que forman la *fenomenología del concepto* de potencia y que conllevan una exigencia cognitiva alta son las tareas de resolución y planteamiento de problemas.

- **Resolución de problemas:** realización de tareas cuya resolución requiere la reflexión sobre el uso de estrategias que utilizar:

«Los resultados de una analítica de una persona indican:

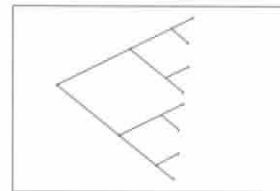
Hematíes: $5,5 \times 10^6$ por cada mm^3

Leucocitos: $7,5 \times 10^6$ por cada mm^3

Halla la cantidad de hematíes y de leucocitos que tiene, sabiendo que contiene 5 litros de sangre.»

- **Formulación de problemas:** planteamiento de situaciones problemáticas que conlleven el uso de determinados conceptos o propiedades:

«Inventa un problema cuya resolución se corresponda con el siguiente diagrama:»



Si estas tareas conllevan una demanda alta y son interpretadas e implementadas por el profesorado de manera que se anima al alumnado a su resolución, y no se varían los aspectos que presentan mayor exigencia cognitiva, el nivel del razonamiento desarrollado por los

estudiantes es alto. Cabe decir que aunque en los textos de Matemáticas de secundaria se propongan tareas de resolución de situaciones problemáticas, relacionadas con el concepto de *potencia*, de nivel alto, si se resuelven de forma puntual y aislada o si su resolución se convierte en rutina, por ejemplo, cuando van precedidas de explicaciones por parte del profesor, el nivel de la tarea disminuye. De ahí la importancia de mantener el rigor de la tarea, el nivel alto de demanda cognitiva, pues es indicador de aprendizaje del alumnado.

Para estructurar el sistema de símbolos de la potencia, los textos de Matemáticas de secundaria obligatoria proponen tareas de nivel bajo como el uso de ejemplos, manipulación de símbolos, aplicación de la definición a casos particulares para extraer reglas generales, y otras tareas como la ampliación del significado de la potencia a exponente entero y fraccionario generalizando propiedades que son tareas con una demanda cognitiva alta. Si bien en la mayoría de los libros de texto se reduce el nivel de demanda cognitiva ya que, para la justificación de propiedades y definición de objetos matemáticos como a^0 o 3^{-2} , se abstraen propiedades locales, sin resaltar que se extrapolan propiedades de un conjunto numérico conocido a otro en el que la potencia no está definida (Martínez y Penalva, 2006).

Por ejemplo, en el cuadro para el cálculo de 2^{-3} que requiere la utilización de restricciones, se hace uso de una propiedad local ($a^m : a^n = a^{m-n}$, si $m > n$) para proporcionar una estructura global de la potencia ($n \leq m$), en vez de dotarle de significado mediante el estudio de regularidades y comportamientos patrones (cuadro 6).

Cuadro 6. Características del proceso de simbolización y su relación con la demanda cognitiva

USO DE PROPIEDADES LOCALES	USO DE MODELOS
Potencias de exponente negativo Si ahora dividimos dos potencias de la misma base pero el exponente del divisor es mayor que el del dividendo, como sucede en $2^2 : 2^5$, se da otra situación diferente. Por una parte, aplicando la regla general, se tiene que: $2^2 : 2^5 = 2^{2-5} = 2^{-3}$ Pero si simplificamos, obtenemos: $2^2 : 2^5 = \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{2^3}$ Es decir, que obtenemos como expresiones diferentes del mismo resultado 2^{-3} y $\frac{1}{2^3}$. Y lo mismo sucede si cambiamos la base de la potencia o los exponentes. Observa: $5^3 : 5^4 = \frac{5^3 \cdot 5^4}{5^3 \cdot 5^4} = \frac{5^3 \cdot 5^4}{5^3 \cdot 5^4} = \frac{1}{5} \Rightarrow 5^{-1} = \frac{1}{5}$ Por eso tiene sentido la siguiente definición general de potencia con exponente negativo: $a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ para cualquier } a \text{ diferente de } 0 \text{ y } n \text{ natural}$	Si $a \neq 0$ y $m > n$, entonces $a^m : a^n = a^{m-n}$ Se observa que no está definido a^0. Si se considera el siguiente modelo: $a^3 = a \cdot a \cdot a$ $a^2 = a \cdot a$ $a^1 = a$ $a^0 = 1$ $\swarrow$ $\swarrow$ $\swarrow$ a a a Los exponentes decrecen de 1 en 1 cada vez. Cuando se divide por a cada vez. De esta forma, se extiende la potencia a exponente nulo y negativo.

Stein y colab
nivel de dem
(2009). Pude
nitiva alto se
métodos utili
los factores c
de la tarea c

Cuadro 7. Fact

**FACTORES ASO
DE LA DEMAND**

1. Conversión e
las tareas.
2. Cambios en
tos, o en la c
verificar o co
3. Falta de tiem
tos que requ
la disposición
estudiantes s
4. Problemas de
tener el inter
5. Selección de
alumnos de
6. Falta de con
los estudiante
reas de nivel

Consecue

Como se ha e
nitiva. Desde
berían estar
matemáticas
justificados, p
petencia mat

- Ampliar
- Modific
- Dando
- Cambia

Por ejemplo,
sión de la cor

Stein y colaboradores han identificado factores que mantienen y factores que reducen el nivel de demanda cognitiva de las tareas (Stein, Grover y Henningsen, 1996; Boston y Smith, 2009). Puede ser que tareas que se seleccionan porque requieren un nivel de demanda cognitiva alto se conviertan en rutinarias debido a explicaciones adicionales del profesor o a los métodos utilizados por los estudiantes para su resolución. El cuadro 7 resume algunos de los factores que se pueden asociar a la permanencia o reducción de la demanda cognitiva de la tarea cuando se implementa en el aula.

Cuadro 7. Factores asociados a la permanencia o reducción del nivel de demanda alto

FACTORES ASOCIADOS CON LA PERMANENCIA DE LA DEMANDA COGNITIVA DE NIVEL ALTO	FACTORES ASOCIADOS CON LA REDUCCIÓN DE LA DEMANDA COGNITIVA DE NIVEL ALTO
1. Conversión en rutinarios aspectos problemáticos de las tareas. 2. Cambios en el énfasis de los significados, conceptos, o en la comprensión de las conexiones para verificar o completar la respuesta. 3. Falta de tiempo para percibir los diferentes aspectos que requiere la resolución de la tarea, así como la disposición de un tiempo excesivo para que los estudiantes sigan con interés la tarea. 4. Problemas de coordinación de la clase impiden mantener el interés en las actividades de nivel alto. 5. Selección de tareas no apropiadas para el grupo de alumnos de clase. 6. Falta de cumplimiento de la responsabilidad de los estudiantes ante los resultados o procesos de tareas de nivel alto.	1. Organización del pensamiento y razonamiento de los estudiantes. 2. Aporte de significados mediante los cuales los estudiantes regulan su propio aprendizaje. 3. Configuración del nivel alto de interpretación por los profesores o alumnos capaces. 4. Insistencia en las justificaciones, explicaciones, significados a través de cuestiones, comentarios o revisiones. 5. Selección de tareas que promueven aprendizajes sobre conocimientos previos. 6. Conexiones conceptuales frecuentes. 7. Concesión de tiempo suficiente para explorar.

Consecuencias de cambiar una tarea

Como se ha expuesto, las tareas pueden modificarse ligeramente y aumentar su demanda cognitiva. Desde este punto de vista, los cambios que un profesor puede hacer a una tarea deberían estar dirigidos a favorecer una implicación de los estudiantes en actividades matemáticas cada vez más desafiante. Los cambios pueden ser pequeños pero deben estar justificados, para intentar desarrollar en los estudiantes diferentes dimensiones de la competencia matemática. Los cambios en una tarea pueden llevarse a cabo:

- Ampliando lo que se pide.
- Modificando algunos aspectos de la presentación.
- Dando una respuesta para que los estudiantes propongan los problemas.
- Cambiando el formato al que suelen estar acostumbrados, etc.

Por ejemplo, en estos momentos se admite que la comunicación matemática es una dimensión de la competencia matemática que debe ser desarrollada en los estudiantes. Desde esta

premisa, se pueden modificar las tareas intentando crear situaciones para que los estudiantes puedan expresar sus ideas. En el ejemplo 7, la tarea de los números decimales ha sido modificada en esta dirección:

Ejemplo 7

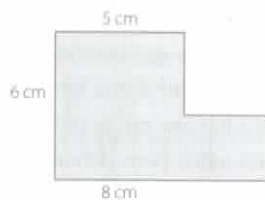
¿CUÁL DE LOS SIGUIENTES NÚMEROS ES MAYOR?	¿CUÁL DE LOS SIGUIENTES NÚMEROS ES MAYOR?
a) 0,08	a) 0,08
b) 0,8	b) 0,8
c) 0,080	c) 0,080
d) 0,008000	d) 0,008000
	Explica tu respuesta

Ambas tareas parecen muy similares; sin embargo, la segunda, al pedir a los estudiantes que expliquen su respuesta, se transforma en una más rica e informativa, pues permite generar un contexto en el cual desarrollar la comunicación matemática (de manera oral o por escrito). Las explicaciones de los estudiantes para la tarea de los números decimales pueden mostrar su conocimiento de la idea de *valor de posición*, de las relaciones entre los decimales y el punto decimal, o sobre las fracciones equivalentes vinculadas a los números decimales.

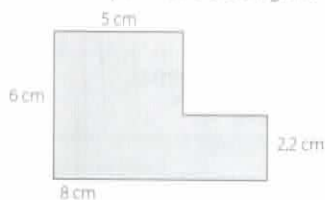
La eliminación de algunos datos que puedan ser obtenidos relacionando otros puede también aumentar la demanda de las tareas (ejemplo 8).

Ejemplo 8

- Calcular el perímetro de la figura.



- Calcular el perímetro de la figura.



El cambio en esta tarea para los estudiantes a la atención, desde el punto de vista de los estudiantes a una tarea centrada en la tarea así modificada, los casos particulares permite ser mane

Actividad 7

Busca en alguno de los libros de matemáticas. Realiza algún cambio en la tarea. ¿Pueden tener de

Otra alternativa a la tarea de los estudiantes que puedan tener de

Actividad 8

Resuelve el problema de la misma desde el punto de

En este tipo de tareas, la demanda de los estudiantes con fracciones –parte-todas las fracciones con fracciones de la tarea, que

En el ejemplo 9 se

Ejemplo 9

- Representa $\frac{5}{4}$ en la

El cambio en esta tarea implica la posibilidad de muchas soluciones, pero permite animar a los estudiantes a tomar diferentes decisiones sobre los datos que no se conocen y centrar la atención, desde lo particular a lo general, discutiendo sobre la idea de que, independientemente de los casos particulares adoptados, el perímetro siempre será el mismo. Animar a los estudiantes a generar justificaciones permite trasladar el foco de la tarea, desde el cálculo a una tarea centrada sobre el significado del perímetro de una figura. Al mismo tiempo, la tarea así modificada y con un rango de objetivos de aprendizaje más amplio (desde calcular casos particulares estrictamente a una discusión sobre la invariancia del perímetro) permite ser manejada por *alumnos de diferentes niveles* (Prestage y Perks, 2001).

Actividad 7

Busca en alguno de los materiales que dispongas una tarea de matemáticas para secundaria. Realiza algún cambio en la misma y comenta las razones del mismo y las consecuencias que pueden tener de cara a los aprendizajes que se promueven.

Otra alternativa a la modificación de las tareas es proporcionar una respuesta y pedirles a los estudiantes que generen problemas. Por ejemplo, el problema siguiente:

«Encontrar un problema que pueda ser resuelto con la operación $3/5 \times 1/2$ »

Actividad 8

Resuelve el problema anterior y comenta qué consecuencias tiene la nueva formulación dada al mismo desde el punto de vista de la demanda cognitiva que supone.

En este tipo de tareas, el uso de fracciones menores o mayores que la unidad pueden aumentar la demanda cognitiva de la tarea, lo que permite profundizar en los significados de las fracciones –parte-todo, reparto equitativo, operador, razón– y de los significados de las operaciones con fracciones. Esta manera de modificar las tareas básicamente produce un tipo diferente de tarea, que exige a los estudiantes que generen otro tipo de actividad matemática.

En el ejemplo 9 se señalan diferentes tipos de tareas modificadas.

Ejemplo 9

- Representa $5/4$ de



- Si la siguiente figura representa los $5/4$ de la unidad, ¿Cuál es la unidad?



La medida de los lados de un rectángulo son 5 m y 17 m. Calcula su área.	El área de un rectángulo es 85 m^2, encuentra las medidas de los lados.
Resuelve la siguiente ecuación lineal $5x + 7 = 47$	- La solución de una ecuación lineal es $x = 8$. ¿Cuál es la ecuación? - Plantea un problema que se pueda resolver con la ecuación lineal, $5x + 7 = 47$
¿Cuál es la altura media de un grupo de estudiantes cuyas alturas son: 169, 166, 162, 169, 157, 157, 160, 162, 162 y 162?	La media de las alturas de los 10 estudiantes de una clase es 1,63 cm. Indica las posibles alturas de los estudiantes.

Cada una de estas modificaciones introduce diferentes niveles de demanda en los estudiantes y, por tanto, puede permitir que diferentes tipos de alumnos resuelvan tareas aparentemente similares pero con demandas cognitivas diferentes.

Analicemos la siguiente variación en la tarea propuesta (ejemplo 10).

Ejemplo 10

Si la siguiente figura es los $\frac{5}{4}$ de la unidad. ¿Cuál es la unidad?



Si la siguiente figura es los $\frac{2}{4}$ de la unidad. ¿Cuál es la unidad?



En esta tarea podemos identificar las siguientes variables, cuya modificación introduce variaciones en el nivel de su demanda cognitiva:

- La magnitud de la fracción: mayor o menor que 1.
- La petición realizada: se pregunta por la unidad, por el todo.
- La figura geométrica usada para representar la parte o el todo.

Variables de tarea y demanda cognitiva

La idea de *variable de tarea* introducida en la sección anterior permite plantear de manera más focalizada la variación de un mismo tipo de tareas, para generar tareas con diferente

nivel de demanda cognitiva, de álgebra, de geometría, de cognitiva, de establecimiento de partes (P , D), de partes. Teniendo en cuenta las relaciones semánticas, de dichas relaciones, de tres problemas.

Cuadro 8. Características de la tarea (Janvier, 1996)

PROBLEMAS

Tres niños están entre los tres tiempos, tres veces más que el doble de la canica tiene.

Tres niños están entre los tres tiempos, tres veces más que el doble de la canica tiene.

Tres niños están entre los tres tiempos, tres veces más que el doble de la canica tienen cada uno.

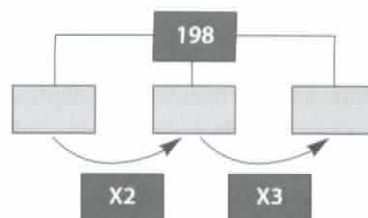
nivel de demanda cognitiva. Por ejemplo, en la introducción a la resolución de problemas de álgebra, en 2.º curso de la ESO, los siguientes problemas ejemplifican diferente demanda cognitiva (Bednarz y Janvier, 1996) dependiendo de la naturaleza de las relaciones que se establecen entre las cantidades. En este ejemplo, una cantidad (198) está dividida en tres partes (P , D y J), y el texto del problema proporciona relaciones multiplicativas entre las partes. Teniendo en cuenta que tenemos tres partes, podemos identificar tres relaciones multiplicativas ($P-D$, $P-J$ y $D-J$). Manteniendo constantes otras variables de tarea (la estructura semántica, el orden en que se presentan las relaciones y la manera en la que se describen dichas relaciones) y modificando sólo las relaciones multiplicativas dadas, podemos generar tres problemas (cuadro 8), cuyo nivel de éxito diferente indica su demanda cognitiva.

Cuadro 8. Características de la estructura de un tipo de problemas en el bloque de Álgebra (Bednarz y Janvier, 1996)

PROBLEMAS		NIVEL DE ÉXITO
Tres niños están jugando a las canicas. Entre los tres tienen 198 canicas. Pedro tiene 6 veces más canicas que Daniel, y Jorge tiene el doble de las canicas de Daniel. ¿Cuántas canicas tienen cada uno?		31,59%
Tres niños están jugando a las canicas. Entre los tres tienen 198 canicas. Jorge tiene el doble de canicas que Daniel, y Pedro tiene tres veces más canicas que Jorge. ¿Cuántas canicas tienen cada uno?		19,44%
Tres niños están jugando a las canicas. Entre los tres tienen 198 canicas. Pedro tiene 6 veces más canicas que Daniel y tres veces más canicas que Jorge. ¿Cuántas canicas tienen cada uno?		5,56 %

Otro tipo de modificación de algunas variables en una tarea son los problemas con la misma estructura semántica que varían en el tipo de relaciones entre las cantidades, pueden generar diferente dificultad al modificar su nivel de demanda cognitiva.

Cuadro 9. Estructura de un tipo de problemas



Fuente: Bednarz y Janvier (1996).

Con la estructura semántica que se muestra en el cuadro 4 y utilizando en las relaciones (indicadas mediante flechas) dos relaciones aditivas (+76 y +114), dos relaciones multiplicativas ($\times 3$ y $\times 2$), y una relación multiplicativa y una relación aditiva ($\times 3$ y +114), podemos generar los tres problemas que se muestran en el ejemplo 11 cuya dificultad es diferente y, por tanto, también su demanda cognitiva (cuadro 9).

Ejemplo 11

- 380 estudiantes están matriculados en las actividades deportivas. Baloncesto tiene 76 estudiantes más que patinaje, y natación tiene 114 más estudiantes que baloncesto. ¿Cuántos estudiantes hay matriculados en cada deporte? (nivel de éxito: 5,21%).
- 380 estudiantes están matriculados en las actividades deportivas. En baloncesto se han matriculado tres veces más estudiantes que en patinaje, y en natación se han matriculado dos veces más estudiantes que en baloncesto. ¿Cuántos estudiantes hay matriculados en cada deporte? (nivel de éxito: 15,16%).
- 380 estudiantes están matriculados en las actividades deportivas. En baloncesto se han matriculado tres veces más estudiantes que en patinaje, y en natación hay 114 estudiantes más que en baloncesto. ¿Cuántos estudiantes hay matriculados en cada deporte? (nivel de éxito: 2,78%).

Algunas de las diferencias entre estos tipos de problemas, encontrados en la transición desde la aritmética al álgebra, pueden ayudar a explicar su diferente nivel de demanda cognitiva cuando los problemas permiten generar una aproximación aritmética, al posibilitarles construir puentes entre los datos conocidos y trabajar desde lo conocido hacia lo que no conocen. Identificar en cada parte del currículo cuáles pueden ser las variables de tarea que pueden ayudar a plantear tareas con la misma estructura pero con diferentes niveles de demanda cognitiva no es un quehacer fácil, debido a que algunas veces la investigación didáctica no ha identificado las variables que puedan tener un verdadero poder explicativo.

REFER

- AZCÁRA
BEDNARZ
solv
L. Le
136).
BOSTON,
asing t
for Res
MARTÍNE
tencia
cias, 2
OCDE (20
y Cien
(INEC
nogra
PRESTAG
New
REAL DEO
nimas
(5 ene
SMITH, M
to Pra
STEIN, M
thema
Educa
STEIN, M.
Teache
SHELL CE
cas. B

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AZCÁRATE, C. y DEULOFEU, J. (1990). *Funciones y gráficas*. Madrid: Síntesis.
- BEDNARZ, N. y JANVIER, B. (1996). Emergence and development of Algebra as a problems-solving tool: continuities and discontinuities with arithmetic. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching* (pp. 115-136). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- BOSTON, M.D. y SMITH, M.S. (2009). Transforming Secondary Mathematics Teaching. Increasing the Cognitive Demands of Instructional Tasks Used in Teachers' Classrooms. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40(2), 119-156.
- MARTÍNEZ, C. y PENALVA, M.C. (2006). Proceso de simbolización del concepto de potencia; Análisis de libros de texto de Secundaria. *Revista de Enseñanza de las Ciencias*, 24(2), 285-298.
- OCDE (2003). *Programme for International Student Assessment*. Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) - Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo (INECSE) (2005) PISA 2003. Pruebas de matemáticas y de Solución de Problemas. Monografía SUMA 03.
- PRESTAGE, S. y PERKS, P. (2001). *Adapting and Extending Secondary Mathematics Activity. New Tasks for Old*. London: David Fulton Publishers.
- REAL DECRETO 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. Boletín Oficial del Estado (5 enero 2007), núm. 5, pp. 677-773.
- SMITH, M.S. y STEIN, M.K. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: From Research to Practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3(5), February, 1998; 344-350.
- STEIN, M.K., GROVER, B.W. y HENNINGSEN, M. (1996). Building Student Capacity for Mathematical Thinking and Reasoning: *An Analysis of Mathematical Tasks Used*. *American Educational Research Journal*, 33(2), 455-488.
- STEIN, M., y otros. (2000). *Implementing Standards-based Mathematics Instruction*. New York: Teachers College Press.
- SHELL CENTRE FOR MATHEMATICAL EDUCATION (1990). *El lenguaje de funciones y gráficas*. Bilbao: MEC-Servicio Editorial Universidad del País Vasco.